# 数値接続法によるトカマク核融合プラズマの磁気流体力学安定性解析
# Magnetohydrodynamic Stability Analysis with Numerical Matching Technique in Tokamak Fusion Plasmas

(財)高度情報科学技術研究機構
計算科学技術部・研究センター
影井　康弘

線型磁気流体力学（MHD）安定性解析において、漸近接続法はよく知られた有力な解析手法である。有理面近傍を除く領域（外部領域）で慣性効果を無視したNewcomb方程式を解き、有理面近傍の内部層方程式の解と漸近的に接続して解を得る。しかしながら、無限小幅の内部層の解に接続する漸近接続問題では、有理面で解が発散する特異解を外部領域において取り扱わねばならないため、数値解析において困難を伴う。そこで、内部層が有限の幅を持つとし、有理面から離れた外部領域で正則な解を扱えるようにした新たな数値接続解法を考案した。本稿では、我々が考案した数値接続法のスキームを解説し、円柱プラズマの線型理想MHD安定性解析への応用例から、当手法の数値計算コードとしての有用性を示す。

## １．はじめに

磁場閉じ込め核融合では、外部コイルとプラズマ自身が作る磁場を利用して、云わば“磁場の容器”を作り、そこにプラズマを長時間閉じ込めて核融合反応を起こす。従って、磁場構造の変化を引き起こす磁気流体力学（Magnetohydrodynamics; MHD）的振る舞いを理解することが大変重要である。プラズマの散逸効果を無視した場合にも存在する理想的MHDモードに対する線型安定性理論及び解析手法は、静止プラズマに限定すれば、既にほぼ確立されており、ERATO［１］、GATO［２］等の数値解析コードが開発されている。しかしながら、臨界安定状態の同定に関わる極低成長率の不安定モードや抵抗性壁モードのような、不安定性の成長率がAlfvén周波数に比べてずっと小さいモードについては、安全係数 $q$ が有理数となる面（有理面）で方程式に特異性が現れてくるため、ある種の解析技法が必要になる。漸近接続法［３］はこのような問題に対する古くから知られた有力な解析手法である。有理面近傍を内部層、その外側を外部領域と見なし、接続問題を設定する。外部領域ではプラズマの慣性（不安定性の成長率に相当する）は小さいとして無視し、Newcomb方程式［４］と呼ばれる方程式を解く。Newcomb方程式において、有理面は確定特異点となっている。一方、内部層においては、方程式の性質上、プラズマの慣性はいくら小さくとも無視できないので、元の方程式の独立変数を引き伸ばして得られる内部層方程式［５］と呼ばれる方程式を解く。Newcomb方程式の解と内部層方程式の解を漸近的に接続することによって、大域的な解を構成する。このようなNewcomb方程式を用いた線型MHD安定性解析コードは既にいくつか開発されている［６－10］。しかしながら、Newcomb方程式の解を無限小幅の内部層の解に接続する従来の漸近接続法では、有理面で解が発散する特異解を取り扱

わねばならないために数値解析が困難であり、解が得られたとしても有理面のごく近傍の数値条件（空間メッシュの構造等）に敏感であることが明らかになっている。そこで、内部層が有理面の周辺で有限の幅を持つとし、有理面から離れた外部領域で解かれるNewcomb方程式が正則であるようなモデルを用いた新しい数値接続解法を考案した[11]。本稿では、その新たな接続法の計算スキームについて述べ、トカマク核融合プラズマの線型MHD安定性解析への応用例を紹介しながら、従来の漸近接続法に優る数値接続法の利点を明示する。

## ２．数値接続問題

ここでは、最も単純化された円柱プラズマの線型理想MHD方程式を用いて、数値接続法の解析手法を示す。円柱プラズマの静止MHD平衡からの微小変位を、$\xi(r, t)\exp(im\theta - ikz)$と表すと、次の線型理想MHD方程式が得られる。

$$\rho\partial_t^2 \boldsymbol{\xi}(r, t) = \boldsymbol{F}[\boldsymbol{\xi}(r, t)] \quad (1)$$

ここで、$(r, \theta, z)$ は円柱座標系、整数$m, n$は変位のポロイダルモード数およびトロイダルモード数、$\rho$ は質量密度、$F$ は線型理想MHD作用素［12］である。接続問題では、領域 $r \in (0, a)$ を有理面近傍の内部層 $(r_L, r_R)$ とその外側の外部領域 $(0, r_L)$, $(r_R, a)$ に分割する。内部層においては、方程式（１）を初期値問題あるいは固有値問題として数値的に解く。外部領域においては、式（１）においてプラズマの慣性を無視した次の方程式

$$\boldsymbol{F}[\boldsymbol{\xi}(r, t)] = 0 \quad (2)$$

を解く。具体的にはこれらを変分形式で表して、有限要素法を用いて解く。円柱プラズマの理想MHD方程式の特徴として、方程式（１），（２）が $\xi$ の $r$ 成分 $\xi_r$ に関する２階の常微分方程式として記述可能であることが挙げられる。特に式（２）は、Newcomb方程式と呼ばれる線型微分方程式に簡約化される。以下に各方程式の解を導く。ただし、本稿では初期値問題のみを扱う。固有値問題における上記方程式の解法と特筆すべき特長については、改めて別の機会に述べたい。

MHD発展方程式（１）を陰的線型多段階法で解く。

$$\rho\boldsymbol{\xi}^{n+1}(r) - (\Delta t)^2 \boldsymbol{F}\left[\boldsymbol{\xi}^{n+1}(r)\right] = \rho\boldsymbol{S}\left[\boldsymbol{\xi}^{n}(r), \boldsymbol{\xi}^{n-1}(r), \cdots, \boldsymbol{\xi}^{n-k}(r)\right] \quad (3)$$

ここで、$\xi^n(r) = \xi(r, n\Delta t)$、$\Delta t$ は時間ステップ幅、$S$ は線型多段階法の後方値の関数であり、非同次項と見なされる。すなわち、発展方程式（１）を時間ステップ毎の境界値問題に帰着して解く。方程式（３）の解は、グリーン関数を用いて次式で表される。

$$\boldsymbol{\xi}_{in}^{n+1}(r) = \xi_L^{n+1}\boldsymbol{G}_{in,L}(r) + \xi_R^{n+1}\boldsymbol{G}_{in,R}(r) + \boldsymbol{H}_{in}^{n+1}(r) \quad (4)$$

ここで、$G_{in,L}$, $G_{in,R}$は、式（３）で右辺をゼロと置いた同次方程式

$$\rho\boldsymbol{\xi} - (\Delta t)^2 \boldsymbol{F}[\boldsymbol{\xi}] = 0 \quad (5)$$

の解で、次の境界条件を満たすものである。

$$G_{in,L}(r_L) = 1,\ G_{in,L}(r_R) = 0 \quad (6)$$

$$G_{in,R}(r_L) = 0,\ G_{in,R}(r_R) = 1 \quad (7)$$

また、$H_{in}^{n+1}$は、方程式（３）の解で同次な境界条件

$$H_{in}^{n+1}(r_L) = 0,\ H_{in}^{n+1}(r_R) = 0 \quad (8)$$

を満たすものである。$G_{in,p}$（$p = L, R$），$H_{in}$は、それぞれ$\boldsymbol{G}_{in,p}$, $\boldsymbol{H}_{in}$の $r$ 成分である。$\xi_L^{n+1}$，$\xi_R^{n+1}$は、接続点 $r_L$, $r_R$における解（$r$成分）である。次に、方程式（２）を外部領域（$r_R$, $a$）で解いたときの解は、

$$\boldsymbol{\xi}_{out,R}(r, t) = \xi_R(t)\,\boldsymbol{G}_{out,R}(r) \quad (9)$$

で表される。ここで、$G_{out,R}$は次の境界条件

（固定境界平衡の場合）

$$G_{out,R}(r_R)=1,\ G_{out,R}(a)=0 \tag{10}$$

を満たすNewcomb方程式の解から代数的に定まるベクトル関数である。同様にして、外部領域（$0, r_L$）における解も次の境界条件

$$G_{out,L}(r_L)=1 \tag{11}$$

を満たし、且つ $r=0$ で正則条件を満たすNewcomb方程式の解によって次のように表される。

$$\boldsymbol{\xi}_{out,L}(r,t)=\xi_L(t)\,\boldsymbol{G}_{out,L}(r) \tag{12}$$

ここで注目すべき点は、有理面から離れた外部領域で解かれるNewcomb方程式は正則なことである。従って、従来の漸近接続法が抱えていた、有理面で解が発散する特異解を数値的に取り扱わねばならないことから来る困難が解消される。

式（4），（9），(12)で表される内部層と左右両外部領域の解には、まだ未定定数 $\xi_L^{n+1}$，$\xi_R^{n+1}$が含まれている。これを定めるのが接続条件である。接続条件として、内部層の解と外部領域の解が接続点 $r_L$, $r_R$で滑らかに繋がる（微分が連続である）ことを課す。この条件を満たす $\xi_L^{n+1}$，$\xi_R^{n+1}$を数値的に求める（線型代数問題を解く）ことは容易である。これは、有理面が複数ある場合でも同様である。境界点から接続点へ、接続点から接続点へと次々に数値接続を行うことで全体の解が得られる。

このようなスキームで解を得る数値接続法では、有理面を含む内部層の線型MHD方程式には何ら近似が加えられていないので、有理面で磁気シア（安全係数 $q=(r/R)(B_t/B_p)$の空間勾配の指標）がゼロであっても接続問題が解ける。また、有理面のSuydam-Mercier指数（圧力勾配の指標）［12−14］によらずに接続問題が解ける。そのため、極小安全係数（$q_{min}$）面の両側で磁気シアの符号が反転する負磁気シア配位のトカマクプラズマの線型MHD安定性解析を接続問題として解析することが可能になる。近年、負磁気シア配位による高性能放電実験が注目を集めているが、時間とともに下降する$q_{min}$が有理数を通過する時刻近傍でプラズマ崩壊が頻発しており、$q_{min}$面が有理面であるときに不安定化するMHDモードの解明が求められている。数値接続法は、従来の漸近接続法では不可能なこのような問題に対しても接続法で解を得ることが可能であり、本手法の特長の一つになっている。

数値接続法は、計算の高速性の観点からも数値計算に相応しい手法である。時間ステップ毎に解く式は、有理面周辺の薄い内部層における方程式（3）の境界値問題と、接続値 $\xi_L$, $\xi_R$に関する接続条件式であり、外部解の関数$G_{out,L}$, $G_{out,R}$はMHD平衡に基づいて一意に定まる。従って、接続法を用いずに全領域に亘ってMHD方程式（境界値問題）を解く手法に比べて、計算に要するCPU時間は大幅に短縮されると期待される。

## 3．数値接続法スキームの検証

ここでは、円柱トカマクプラズマの理想MHDモードを数値接続問題で解いた例を示す。図１は、負磁気シア配位の円柱トカマク（主半径 $R_0=5$）における $m/n=2/1$ の内部モード（$m$, $n$はポロイダルモード数とトロイダルモード数）に対する初期値問題の解析結果である。解析に用いた平衡は、極小安全係数 $q_{min}=2.0$が $r=0.4$座標面にあり、この面が $m/n=2/1$ モードと共鳴する有理面を構成している。有理面に局在する固有モード構造に対応して、総数$10^4$の充分微細な空間メッシュを用いて解析を行った。また、初期値問題における方程式（3）の時間差分には、２次精度の後退差分公式（BDF）［15］を用い、$\Delta t=0.1/\omega_a$（$\omega_a$：プラズマ表面のポロイダル磁場に対応するAlfvén周波数）とした。図１(左)の成長率、図１(右)の固有モード構造ともに、左右の接続点（$r_L=0.35$, $r_R=0.45$）

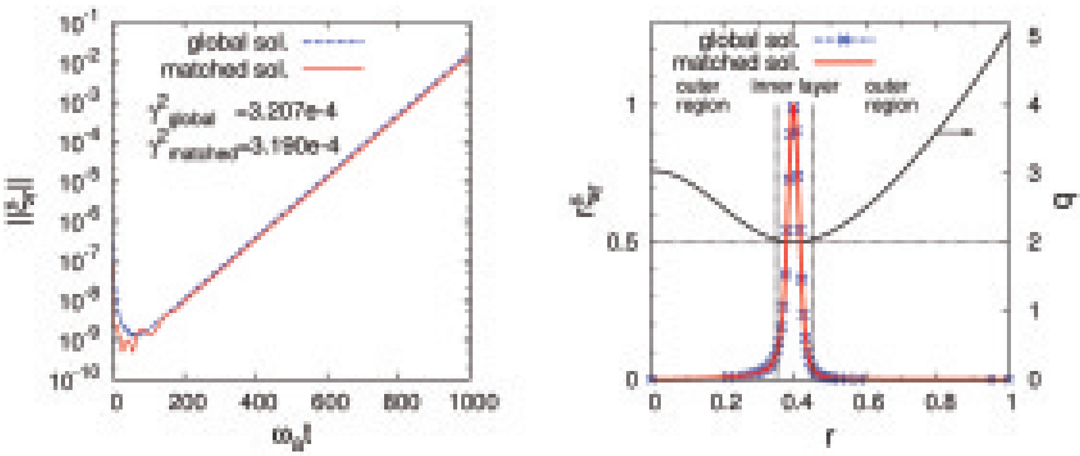


図１　$m$＝２モードに関する接続解と大域解の比較。左図は成長率，右図は固有モード構造及びMHD平衡の $q$ 分布を表す。MHD平衡条件は，$q_{min}$＝2.0，極小 $q$ 位置 $r_{qmin}$＝0.4，$\beta$＝２％。内部層領域の設定条件は，$r\in(r_L, r_R)$＝(0.35, 0.45)。接続解と大域解の両者はよく一致する。

で内･外部解を繋いで得られる“接続解”と、全領域に亘って線型MHD方程式を解いて得られる“大域解”とがよく一致していることが確認される。両者の誤差は、図２に示すように、内部層幅 $\Delta r\equiv r_R-r_L$が0.1のケースで0.1%のオーダー内にある。

図３は、初期値問題で得られた不安定性の成長率（$\gamma^2$）を、固有値問題による解析結果と比較した図である。両者はほぼ完全に一致しており、発展方程式においても、前節で述べたスキームを用いることによって固有値問題と同等の精度が保証されることがわかる。このことは、一般には初期値問題として定式化される抵抗性MHDモードや回転プラズマのMHDモードの解析に対して、数値接続法が有効な手法になりえることを示唆している。これについては次節で詳しく述べる。また、図３からは、慣性効果が支配的な有理面近傍のごく狭い領域を除いてNewcomb問題を解けばよいことが再確認される。例えば本ケースでは、内部層幅は $\Delta r$～0.1程度でよく、外部領域のNewcomb方程式の解が既に得られているならば、接続法を用いた場合に解析に要するCPU時間は、全体を解く場合に比べて１/10程度に短縮される。

以上より、数値接続法はトカマクプラズマの線型MHD安定性解析に有効な手法であると結論付けられる。

## ４．数値接続問題の拡張性

数値接続問題を解くことには、前節までに述べた以外にもいくつかの利点がある。その第一は物理モデルに対する拡張性の高さである。解析対象がプラズマの非理想効果に由来する抵抗性MHDモードである場合、その効果が支配的なのは有理面近傍の内部層領域に限られるので、物理モデルに敏感な内部層の方程式のみを抵抗性MHD発展方程式に置き換え、外部領域はNewcomb方程式のままで数値接続問題を解けばよい［16, 17］。このとき、内部層の幅は有理面の電気抵抗値から見積もることができる。また、内部層の方程式に、流れを考慮した線型MHD方程式を用いると、回転プラズマのMHDモードの解析が可能になる。この回転プラズマのMHD方程式は、Frieman-Rotenberg方程式［18］として記述される。

$$\rho\partial_t^2\boldsymbol{\xi}+2\rho(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\partial_t\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{F}[\boldsymbol{\xi}] \qquad (13)$$

ここで、$F$は流れを含む一般化されたMHDの自己共役作用素である。$\rho(v\cdot\nabla)$が非自己共役作用素であるので、式(13)は初期値問

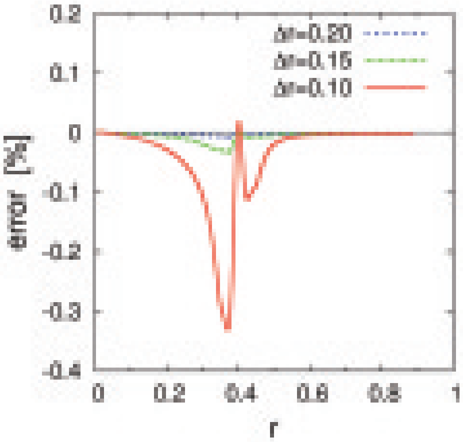


図２　$m$＝２固有モード構造に関する接続解と大域解の相対誤差（$r\xi_r$の最大値で規格化)。内部層幅$\Delta r$＝0.1の計算において、誤差は0.1％のオーダー内にある。

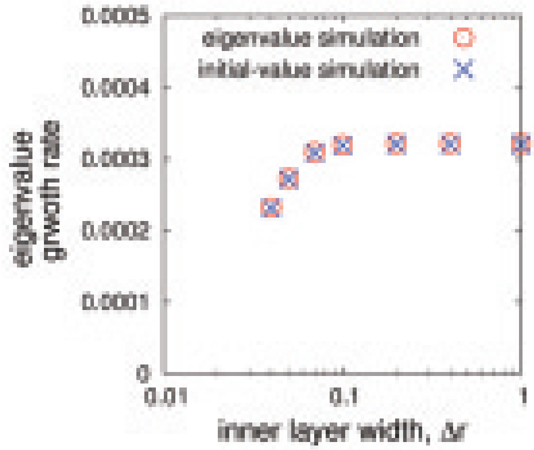


図３　初期値問題または固有値問題における$m$＝２モードの成長率及び固有値。両者は完全に一致する。また、内部層幅$\Delta r \geq 0.1$の条件で大域解に充分近い接続解が得られる。

題として解かれる。具体的にはこれを弱形式で表して有限要素法で解く[19]。徳田らはこのようにして、数値接続問題を回転プラズマのMHD安定性解析にも応用し、ポロイダル方向に高速回転（Alfvén速度の数パーセント）するプラズマにおいても、数値接続解の計算誤差が数パーセント以内であることを最近明らかにした［20]。

外部領域で解かれるNewcomb方程式から授かる別の恩恵として、自由境界プラズマの外部MHDモード解析に向けたモデル拡張の容易さがある。Newcomb方程式の特性を用いると、プラズマのポテンシャルエネルギーの変化を表面の変位ベクトルで表すことができ、従って本稿の計算に用いたような、変分原理に基づく内部MHDモードの安定性解析手法を外部MHDモードの解析に容易に拡張できる［21]。現在、トカマクの$\beta$限界（圧力限界の指標)を決定する要因の一つとして、抵抗性壁モードと呼ばれる外部MHDモードに注目が集まっており、数値接続法はそのようなモードの解析に対しても有効であろうと考えられる。今後我々は、本稿で提案した数値接続法を抵抗性壁モードの解析に応用したいと考えている。

## ５．まとめ

本稿では、著者が日本原子力研究開発機構・プラズマ理論シミュレーショングループとともに開発した、プラズマの線型MHD安定性解析のための新しい接続法スキーム（数値接続法）を紹介した。この手法の特徴は、有理面周りの（有限幅の）内部層の方程式と、有理面から離れた外部領域の方程式との接続問題を数値的に解くことであり、以下の利点を持つ。

- 従来の漸近接続法が抱えていた、有理面で解が発散する特異解を数値的に取り扱わねばならないことから来る困難が解消される。
- 従来の漸近接続法では解けない、有理面で磁気シアがゼロの配位に対する接続問題が解ける。また、有理面のSuydam-Mercier指数によらずに接続問題が解ける。
- 外部MHDモード（抵抗性壁モード）に対する接続問題が容易に解ける。
- 特に固有値問題においては、従来の漸近接続法では不可能な、外部領域における慣性効果を摂動論的に解析することが可能になる。
- 有理面周りの薄い内部層における境界値

問題を解けばよいので、全体の境界値問題を解く場合に比べて計算に要するCPU時間が大幅に短縮される。

特に、トカマク核融合研究への応用に係わる具体的意義として、高性能負磁気シアプラズマ放電で問題となる、極小安全係数（$q_{min}$）面が有理面になったときのMHD不安定モードの解析に対して、有効な接続解法を見出している。これは本研究の画期的成果である。

高性能プラズマの定常化を目指すトカマク核融合研究では、定常維持可能な規格化圧力を制限する抵抗性壁モードの抑制が不可欠であり、現在最も重要な研究課題の一つである。抵抗性壁モードの安定性はプラズマの回転に大きく依存することが知られているが、回転が小さいと考えられている国際熱核融合実験炉（ITER）や将来の核融合炉においてどの程度の回転で安定化が可能であるかは不明であり、理論的解析も未だ充分になされていない。本稿で紹介した数値接続法スキームは、回転プラズマの抵抗性壁モードに対して有効な数値解析手法になる可能性があり、今後、そのような解析に向けてコードの拡張を図りたいと考えている。

## 謝　辞

本研究は、日本原子力研究開発機構・プラズマ理論シミュレーショングループリーダー、徳田伸二博士とともに行われたものです。研究の遂行にあたり、多大なる助言を頂いた氏に深く感謝致します。

## 参考文献

[1] R. Gruber, F. Troyon, D. Berger, L.C. Bernard, S. Rousset, R. Schreiber, W. Kerner, W. Schneider, and K.V. Roberts, Comput. Phys. Commun. **21**, 323 (1981); and S. Tokuda, T. Tsunematsu, M. Azumi, T. Takizuka, K. Naraoka and T. Takeda, Rep. JAERI-M 9040, Japan Atomic Energy Research Institute, Ibaraki (1980).

[2] L.C. Bernard, F.J. Helton, and R.W. Moore, Comput. Phys. Commun **24**, 377 (1981).

[3] H.P. Furth, J. Killeen, M.N. Rosenbluth, Phys. Fluids **6**, 459 (1963).

[4] W.A. Newcomb, Ann. Phys. (N.Y.) **10**, 232 (1960).

[5] A.H. Glasser, J.M. Greene, and J.L. Johnson, Phys. Fluids **18**, 875 (1975).

[6] A. Pletzer and R.L. Dewar, J. Plasma Phys. **45**, 427 (1991).

[7] S. Tokuda and T. Watanabe, J. Plasma Fusion Res. **73**, 1141 (1997).

[8] A. Pletzer, A. Bondeson and R.L. Dewar, J. Comput. Phys. **115**, 530 (1994).

[9] S. Tokuda and T. Watanabe, Phys. Plasmas **6**, 3012 (1999).

[10] A.H. Glasser, Los. Alamos Report LAUR-95-528 (1997).

[11] Y. Kagei and S. Tokuda, Plasma Fusion Res. **3**, 039 (2008).

[12] J.P. Freidberg, *Ideal Magnetohydrodynamics* (Plenum Press, New York, 1987).

[13] B.R. Suydam, *Proc. 2nd U.N. Int. Conf. on Peaceful Uses of Atomic Energy,* **31**, 157 (Geneva, 1958).

[14] C. Mercier, Nucl. Fusion **1**, 47 (1960).

[15] 三井斌友：「常微分方程式の数値解法」（岩波書店，2003）.

[16] S. Tokuda, J. Plasma Fusion Res. **77**, 276 (2001).

[17] S. Tokuda, Nuclear Fusion **41**, 1037 (2001).

[18] E. Frieman and M. Rotenberg, Rev. Modern Phys. **32**, 898 (1960).

[19] S. Tokuda, J. Plasma Fusion Res. **74**,

503 (1998).

[20] S. Tokuda, J. Shiraishi, Y. Kagei and N. Aiba, *Preprint for 22nd IAEA Fusion Energy Conf.*, TH/P9 - 20 (Geneva, 2008).

[21] N. Aiba, S. Tokuda, T. Ishizawa and M. Okamoto, Plasma Phys. Control. Fusion **46**, 1699 (2004).