

ピアノの音響とその物理モデル

On the acoustics of the piano and its physics-based modeling

神奈川工科大学 創造工学部
西口 磯春

ピアノは1700年頃、イタリアで誕生した楽器である。その後、約200年かけて現在のピアノの構造に到達している。古典的な楽器とも言えるが、現在でも音響学的なあるいは計算力学的な興味の対象であり、特に、ピアノの発音機構をモデル化する技術については現在でも精力的に研究されている。このピアノの物理モデルに関する研究の目的の一つは、ピアノの構造や材料とピアノ音の関係を明らかにし、従来経験に頼ることの多かったピアノの設計をコンピュータシミュレーション等の技術を用いて、より合理的に進めることである。もう一つの目的は、電子楽器等のピアノ音源の作成である。本稿では、この物理モデルに関する研究の一部を紹介する。

1. はじめに

ピアノはクラシック音楽のみならずいろいろな分野の音楽で用いられる。ピアノはもともとなじみ深い楽器のひとつである。

ピアノは今から約300年前にイタリアのBartolomeo Cristoforiによって発明された。チェンバロとは異なり、音の強弱がつけられるのが大きな特徴であった。Cristoforiの発明をレポートで紹介し、この情報をヨーロッパ中に広めるのに貢献した作家のScipione Maffeiは、この特徴をバイオリンやチェロになぞらえ、チェンバロとの違いを強調している。これは、当時盛んであったバロック音楽にとって、音の強弱や音色の対比が重要な要素であったことが背景となっているという。一方、音量に関しては当時のチェンバロの音量にも届かないことをMaffei自身が認めている [1]。鍵盤数も現在のピアノと比較すれば少なく、現存するCristoforiのピアノのうち2台が49鍵、1台が54鍵である [2]。その後、ピアノの構造は大きく変化している。その最大の原動力の一つはいかにして大きな音を出

すかということであった。このためには弦の数を増やすと共に、太い弦を用いて張力を高くする必要がある。この条件は鑄造による金属フレームの採用により実現され、1900年頃までには現在とほぼ同一のピアノモデルが完成している。100年以上、基本構造が変化していないという意味では古典的な楽器とも言えるが、現在でも音響学的なあるいは計算力学的な興味の対象であり、特に、ピアノの発音機構をモデル化する技術については現在でも精力的に研究されている [3]。

このピアノの物理モデルに関する研究の目的の一つは、ピアノの構造や材料とピアノ音の関係を明らかにし、従来経験に頼ることの多かったピアノの設計をコンピュータシミュレーション等の技術を用いて、より合理的に進めることである。もう一つの目的は、電子楽器等のピアノ音源の作成である。本稿では、この物理モデルに関する研究について紹介する。前半でピアノの構造と発音メカニズムについて述べた後、物理モデルに関する検討の例を示す。

2. ピアノの構造と発音のしくみ [3,4]

図1はグランドピアノの蓋を外して上から見たところである。88個のキーを有する鍵盤の向こうにフレームあるいはプレートと呼ばれる金属製の板が見える。フレームはボルトで木製のケース（あるいはリム）に取り付けられている。フレームには弦が張られており、その下部には、響板と呼ばれる木製の振動板が見える。弦は、手前の調律ピンから、駒を経由して、奥のヒッチピンに至る。中高音部の弦は、二つある駒のうち手前の長駒の上面に埋め込まれた駒ピンを経由してフレーム上にあるヒッチピンに至る。一方、低音部の弦は、手前の長い駒の上の空間を通過して奥の短駒の上面の駒ピンを経由し、フレーム上のヒッチピンに至っている。

図1では3本のペダルが見える。グランドピアノによっては2本のペダルのものもある。

図2では、中音域から高音域にかけて、弦と駒の部分を示した。手前に調律ピンが、奥には長駒とフレーム上に埋め込まれたヒッチピンが見える。

ここに示したピアノでは、低音域から中音域にかけてアグラフが用いられている。調律ピンに巻かれた弦はアグラフの孔を通過して駒上面の駒ピンを経由し、フレーム上に設置されたヒッチピンに至る。弦にはヒッチピンで終わっているものと、ヒッチピンで折り返して再び駒ピンを経由し、調律ピンまで戻っているものがある。一方、図の右側の高音域ではアグラフの代わりに、フレームと一体となったカポダストロ・バーあるいはベアリングと呼ばれる構造が用いられている。調律ピンに巻かれた弦は、カポダストロ・バーの下を通過して駒ピンに向かっていく。カポダストロ・バーは、下向きの力を弦に与えて押さえている。

以下、グランドピアノの主要な構造をもう少し詳しく見てみる。

2.1 弦と支柱

現代のピアノには、スチール製の丈夫な弦が用いられている。弦に振動を与える場合、弦の長さ（スピーキングレングス）、弦の質量、弦を張る力（張力）のそれぞれが音の高さに関係する。長さについては長い方が、弦の質量については大きい方が低い音が出る。張力については、張力が小さい方が低い音になるが、弦の張力を小さくすると音量が下がるため、ある程度以上の張力を確保する必要がある。また、同じく音量の点で、弦の長さも最低限確保する必要がある。ピアノの場合、最高音部の弦長が50mm程度である。低音部にかけて、弦の長さを長くすることで低い音を出しているが、弦長の変化だけでは弦があまりにも長くなってしまったため、低音部では芯となる弦の周りに銅製の線をコイル状に巻いた弦（巻線）を用いている。また、図1でみたように低音部の弦を中高音部の弦と交差させることで、ケースのスペースを有効に使う工夫をしている。通常のピアノでは、最低音部の数本を除き一つのキーに対して複数の弦が用いられている。図2に示したように中高音では3本の弦が用いられており、グランドピアノでは弦の総数は230本程度であり、その張力の合計は10数トンに達する。

図3はグランドピアノの下部を鍵盤とは反対方向から覗いたところであるが、フレームを支える頑強な木製の支柱が見える。発明当時のピアノと現在のピアノの最も大きな違いのひとつは、音量が遙かに増大したことである。これは、大きな張力に耐える丈夫な弦の開発、金属製のフレームや頑強な支柱の採用により、実現されている。

2.2 響板

ハンマーによって引き起こされた弦の振動は、駒を経由して響板に伝わり、空気の振動となる。図1と図3で響板の表と裏を見るこ

とができる。響板は軽くて弾性の大きいスプルースと呼ばれる木で作られている。響板の厚みは約1センチ程度であるが、振動のし易さのため周辺部が薄くなっているのが普通である。響板の裏側には響棒が取り付けられている。音は木目の方向に早く伝わる性質があるので、響板の木目と交差する方向に響棒を取り付け、均等に音が伝わるための工夫をしている。

響板は平らではなく、中央部分が1センチ程度せり上がっている。この形状はクラウン(むくり)と呼ばれる。駒の上を通る弦の位置を弦の両端の部分より高くすることで、弦が響板を押しつける力が働く。これにより、響板が振動しやすくなる。古いピアノでは、響板がへたってこのせり上がりが小さくなり、音の響きが悪くなることがある。



図1 グランドピアノの外観



図2 グランドピアノの弦と駒

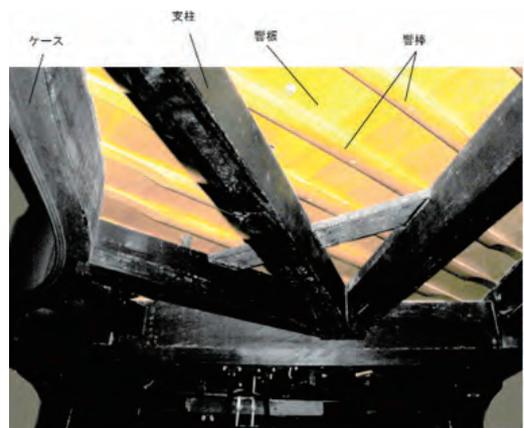


図3 グランドピアノの下部

2.3 アクション

ピアノのアクションは、キーの動きをハンマーヘッドに伝える機構である。図4は、グランドピアノのアクションを取り出して、横から見た写真である。左側にピアノの弦を叩くハンマーヘッドが並んでいる。

図5は、グランドピアノの1つのキーとアクションを取り出して示したものである。

キーを押すとキーの反対側が上昇してダンパーを持ち上げることにより、弦が自由振動できる状態になる。その直後に、アクションによって運動を開始したハンマーが弦に到達して弦が振動する。

弦を打って音を出すためには、鍵盤のキーを押したときの一方の動きに対して、ハンマーが弦に向かうだけでなく、弦に衝突した直後に弦から離脱する必要がある。離脱せずにハンマーが弦と接触した状態が続くと、弦の振動を止めてしまうことになるため、アクションは、キーの動きからハンマーの動きを切り離す機構を持っている。このため、弦に衝突した直後にハンマーの動きは反転し、弦より離脱する。アクション機構の詳細については文献 [3,4] を参照されたい。

弦とハンマーの接触時間はキーを押す速さによって変化するが、数ミリ秒以下である。弦の振動は駒を介して響板に伝わり、空気中の音となって我々の耳に届くことになる。キー

から手を離すと、ダンパーが弦の上に降りて弦の振動が止まる。

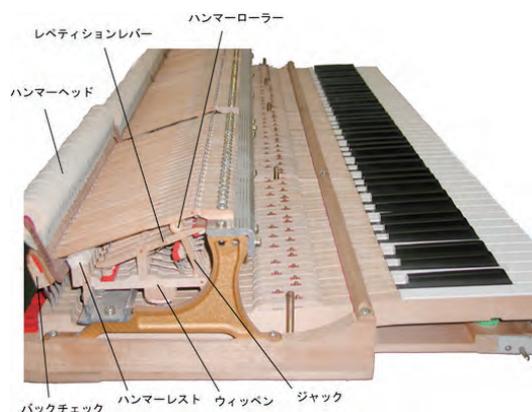


図4 グランドピアノのアクション

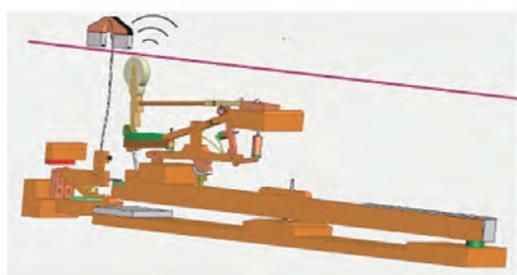
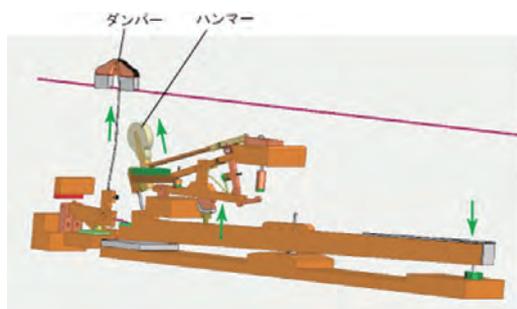


図5 グランドピアノの打弦機構

2.4 ペダル

現代のグランドピアノには3本あるいは2本のペダルがついており、図1のグランドピアノには以下のペダルがついている。

(1) ダンパーペダル

図1の右側のペダルはダンパーペダルあるいはサステインペダルと呼ばれる。このペダルを踏むとすべてのダンパーが持ち上がるため、踏んでいる間は、キーから手を離しても音が鳴り続ける。

(2) ソフトペダル

図1の左側のペダルはソフトペダルあるいはウナコルダペダルと呼ばれる。このペダルを踏むと鍵盤とアクションはその土台のキーフレームごと、横に移動する。これによって弦を叩くハンマーの位置が移動し、音量や音色が変化する。

(3) ソステヌートペダル

3本ペダルの真ん中はソステヌートペダルと呼ばれる。このペダルは19世紀後半以降に使われるようになった。音を伸ばすために使われるという点ではダンパーペダルと共通であるが、すべての弦のダンパーを一斉に持ち上げるダンパーペダルとはその働きが異なり、ソステヌートペダルの場合には、このペダルを踏む前に上がっているダンパーだけをその位置に保持する。このペダルから足はずすと、保持されていたダンパーが降りて音を止める。

3. ピアノの物理モデルについて [3]

ピアノの演奏者から聴取者に至る過程を構成する要素としては、(1) 演奏者との唯一の接点であるキー、ペダル、アクション等のインターフェイス部、(2) ハンマー、弦、響板等の発音部、(3) プレート、支柱、ケース等の支持部、および、(4) 部屋やホール等の音響空間が挙げられる。ピアノ設計の立場から構造や材料と音との関係を探るにせよ、ピアノ音源を開発するにせよ、これらの過程を定量的に評価できる物理モデルを構築する必要がある。そのための研究は現在でも継続して行われている。以下では、発音部であるハンマーと弦を中心に、その物理モデルについて述べる。

3.1 ピアノハンマー

ピアノハンマーの頭部の写真を図6に示す。初期のピアノでは動物の皮などが用いら

れていたが、現代のハンマーの外面にはフェルトが巻付けてある。このフェルトの形状や硬度により、ピアノ音は大きく変化する。ピアノ調律においては、ハンマーに針を刺すことにより、音を調整する。ハンマーの形状やサイズは同じピアノでも音の高さによって異なっており、ピアノの物理モデルにおいてはこのハンマーの力学的特性をいかにモデル化するかが一つの鍵となる。

モデル化にはいくつかの方法が考えられるが、ハンマーと弦との接触点に作用する力 F とハンマーの圧縮量 u に対して、非線形特性を与える方法が良く用いられる。例えば、Stulovは、弦とハンマーの接触点に次式を仮定している [5]。

$$F(u) = k \left[u^p + \alpha \frac{d(u^p)}{dt} \right] \quad (1)$$

ただし、 k 、 α 、および指数 p は共に定数である。式(1)において α を0と置くと、非線形弾性バネモデルとなる。第二項の存在により F と u は一対一に対応しなくなり、履歴に依存することになる。



図6 ピアノハンマー (左:低音用, 右:高音用)

上述のモデルでは、ハンマーを一つの質点と見なし、ハンマーの変形をフェルトの圧縮量という一つの自由度のみで表現している。ハンマー力も、これに対応して固定されたプロフィールの力としての取り扱いがされてい

る。しかし、実際には、ハンマーと弦の接触位置と面積は時間的に変化し、弦に作用する力のプロフィールも刻々と変化する。ハンマーの運動についても、一つの質点としての扱いには限界がある。このため、ハンマーフェルトを連続体としてモデル化する方法も提案されている。さらに、ピアニストの弾き方によってピアノ音がどのように変化するか、といった問題を解明するために、ハンマーアクション機構の変形の効果も考慮した物理モデルも検討されている。

3.2 ピアノ弦の運動

既に述べたように、キーが押されるとハンマーが弦に衝突し、接触点から弦の両端に向けた波が生じる。この時の波の形はハンマーが弦を打つときの速さや、ハンマーの重さ、フェルトの形や堅さによっても変化し、それが音色の違いとなって現れる。一般に、低音部では重くて大きなハンマーが、高音部では軽くて先のとがったハンマーが使われている。

打弦によって生じた波の一方は、弦を止めているアグラフあるいはベアリングまで伝わるが、ここで弦はしっかり固定されているため、波は反射して今度は駒に向かい、最初に駒に向かった波を追いかける。これらの波が駒に届くと、波はここで反射して今度は、アグラフあるいはベアリングの方向に向かう。この時、弦の動きの一部が駒を通して響板に伝わり、さらに響板は空気の波を引き起こしてそれが音となって私たちの耳に届く。

楽器において弦は代表的な発音源であり、弦の振動に関する研究は古くから行われていた。しかし、ピアノ音に影響を与えるさまざまな要因について、定量的な把握が可能となったのは最近のことであり、現在でも研究途上である。

ピアノ弦の運動に影響を与える主な要因は以下のとおりである。

- ・弦の基本設計。弦長のスケージング、打弦

点の位置、巻線の利用など。

- ・インハーモニシティの影響
 - ・ハンマーによる打弦
 - ・複数弦の連成運動
 - ・弦の空間運動（弦の回転運動、弦の長手方向の運動）
 - ・弦と駒・響板・ケース等との連成
- 以下にいくつかの例を示す。

3.3 弦の基本設計

ピアノに限らず、弦を有する楽器にとって基本となるのが理想弦モデルである。弦の軸方向の位置座標を x 、響板に対する垂直方向の変位を v とした時、 v は次の微分方程式の解として得られる。

$$\mu \frac{\partial v^2}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial v^2}{\partial x^2} \quad (2)$$

ただし、 t は時刻、 T_0 は弦の張力、 μ は線密度（単位弦長あたりの質量）である。よく知られているように、両端固定の条件下で式(2)の固有振動数を求めると次のようになる。

$$f_n^{ideal} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A_0}} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{\sigma_0}{\rho}} \quad (3)$$

ここで、 n は固有振動数の次数、 L は弦長であり、ピアノの場合はスピーキングレングスである。 ρ は体積密度、 A_0 は断面積である。 σ_0 は単位断面積あたりの張力であり、応力と呼ばれる。ピアノの場合、その種類やサイズにかかわらず、最高音 (C8) の弦長は 50 mm ~ 55 mm である。最高音の弦長がこれより短くなると音量が小さくなり音の減衰も早くなる。一方で、式(3)からわかるように、同じ材料の弦を想定し、振動数を一定とすると L と $\sqrt{\sigma_0}$ が比例するため、最高音の弦長を長くすると弦に生じる応力が大きくなり、弦の材料の許容応力をこえてしまう。ピアノの最高音の弦長は、これらを両立させた結果であると考えることが出来る。

式(3)によれば、応力 σ_0 を一定値にすると、振動数と弦長は反比例する。このため最高音の1オクターブ下は振動数が1/2だから弦長が2倍となる。例えば7オクターブ下のキー(C1)の弦長は、 $2^7=128$ 倍となってしまう。このため、ピアノでは、低い音になるに従って、弦の線密度 μ を大きくすることで弦長を抑える設計としている。

3.4 インハーモニシティ

式(2)においては、弦の弾性に起因する曲げ変形に対する抵抗が考慮されていないが、実際のピアノではこれを無視できない。この効果を考慮すると、次の微分方程式が得られる。

$$\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \quad (4)$$

式(4)において、 I は断面2次モーメントと呼ばれ、断面の形状によって定まる。断面を半径 r の円形状とすれば、 $I = \pi r^4 / 4$ で与えられる。また、 E は縦弾性係数である。 EI は曲げ剛性とよばれ、曲げモーメントに対する変形抵抗の大きさの指標となる。この曲げ剛性の存在により、高い振動数の波ほど弦中を早く伝搬し、分散性を生じる。式(4)について、弦の両端をピン結合（変位固定・回転自由）した条件のもとでの固有振動数を求めると、

$$f_n^{elastic} = n f_1^{ideal} \sqrt{1 + n^2 B} \quad (5)$$

が得られる。

ただし、 f_1^{ideal} は、理想弦の第1次振動数であり、式(3)によって与えられる。また、 B は理想弦との差異を表す項であり、次式で与えられる。

$$B = \frac{\pi^2 EI}{T L^2} = \frac{\pi^3 E r^4}{4 T L^2} \quad (6)$$

式(6)より、弾性による曲げ剛性を考慮

すると固有振動数は高次になるにつれて第1次振動数の整数倍からの差が大きくなることが分かる。このインハーモニシティと呼ばれる性質は、実際のピアノ音の周波数分析結果においても観察され、ピアノの特徴の一つとなっている。この数式表現についても古くから知られており、Rayleighの歴史的な著作[6]にも同等の式が記載されている。実際のグランドピアノについて測定したインハーモニシティを図7に示す[7]。高次の部分音になるにつれて、基本周波数の整数倍との差が大きくなっていることが分かる。このインハーモニシティの存在は、調律方法に関わらずピアノの和音ではうなりが生じることを意味しており、ピアノ調律をする上でも重要である[3,4]。

式(4)がピアノの物理モデルにおいて基本となる式である。実際には弦の両端は固定されておらず、その一端は響板上の駒に設置されている。また、内部摩擦や外部からの抵抗減衰の効果も考慮する必要がある。

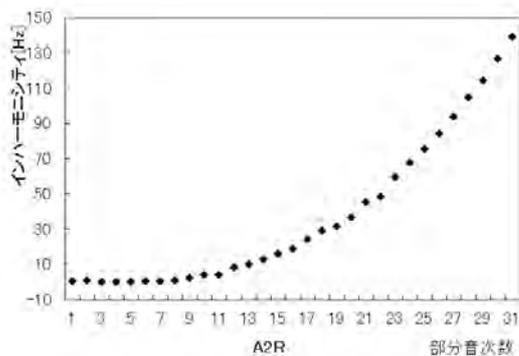


図7 ピアノ音のインハーモニシティ (A2音)

3.5 ハンマーによる打弦

ピアノにおいては、弦の振動はハンマーが弦に衝突することにより引き起こされる。Askenfeltら[8]の実験結果によれば、キーがキーベッドに到達する時刻とハンマーが弦に接触する時刻が打鍵速度により変化する。打鍵速度が大きい場合には、ハンマーが弦に

接触するより早く、キーがキーベッドに到達する。一方、打鍵速度が小さい場合にはこの前後関係は逆になる。また、弦とハンマーの接触時間も打鍵速度により変化し、打鍵速度が大きい場合ほど、接触時間は短くなる。

ハンマー打弦に関しては、Hallら[9-11]が理論的な検討を行っている。これらの検討ではハンマーを1つの質点として表現しているが、これらの物理モデルによるシミュレーション音源は十分でないとの指摘が数多くなされており、さらに詳細な打弦の物理モデルの検討が行われている。主な検討項目としては、以下が挙げられる。

- ・ハンマーシャンクの変形 [12-19]
- ・ハンマーヘッドの連続体としての変形挙動 [17,18,20]
- ・ハンマーヘッドと弦の有限幅の接触 [17,18,21-25]
- ・ハンマーヘッドと弦の間の摩擦、相対滑り [14-18]
- ・ハンマーアクションの運動との連成 [14-16]

3.6 複数弦の連成運動

図8は振動数が440Hzのラの音の大きさについて、約5秒間の範囲を示している。この図によると、最初に大きな音が出てそれが急速に小さくなる。その後、大きさの変化は小

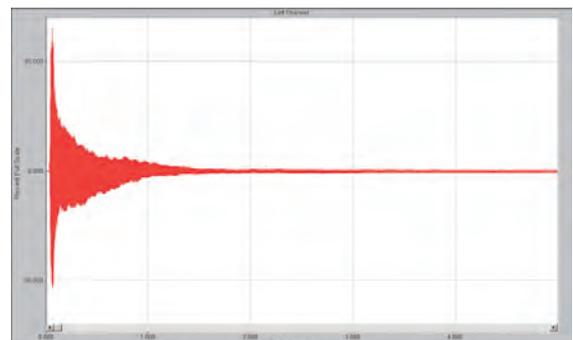


図8 A4音の音の大きさの時間変化

さくなり、時間をかけて音が小さくなっていく。この音の大きさの変化の様子は2段減衰と呼ばれており、ピアノ音の特徴のひとつである。2段減衰については、複数弦の連成と弦の回転運動が寄与していると考えられている。

一つのハンマーで同時に打弦された複数の弦は、一緒に運動して駒の振動を引き起こす。この時、複数の弦を引っ張る力のわずかなずれによって次第に駒に力を及ぼすタイミングが変化し、最終的には、弦から駒に及ぼす力がお互いに打ち消し合うタイミングに落ち着くと考えられている[26]。弦の動きが同じタイミングだと弦から駒を通して響板に伝わる力は一本の場合に比べて大きくなるため、大きな音が出るが、その分、打弦によって弦に蓄えられたエネルギーが響板に伝わり、音の減衰が早くなる。一方、弦から駒に及ぼす力がお互いに打ち消し合うタイミングに落ち着くと、弦のエネルギーはなかなか駒に伝わらず、その分、振動が長続きすることになる。このことがピアノ音の特徴の一つである2段減衰と呼ばれる音量の変化の原因の一つだと考えられている。このことは、簡単な2質点モデルを用いて表現することができる[27,28]。

3.7 弦の空間運動

弦の回転運動も2段減衰の理由として考えられている。グランドピアノに例を取ると、弦は下からのハンマーの突き上げにより最初は上下に運動するが、駒についたピンの傾きなどの影響で水平方向の動きも加わり、結果的に弦は回転する。この時、上下方向の運動が2段減衰の前半の急速な減衰に対応し、水平方向の運動の影響が後半の緩やかな減衰に現れていると考えられている。

図9にグランドピアノについて測定した弦の回転運動の例を示す[7,23]。

空間運動の数値シミュレーションについては岩岡ら[29]、Nishiguchiら[23]、長沼ら[30]、西口ら[28]が駒部における垂直振動

と水平振動の連成を表す物理モデルを提案している。

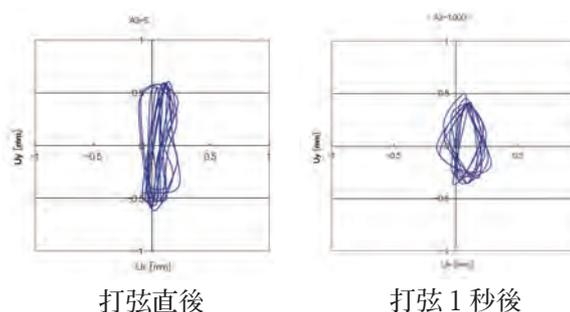


図9 ピアノ弦の回転運動の例 (A3音)

3.8 弦の縦振動と2次系列

ピアノ音の特徴である2段減衰に寄与する要因として、複数弦の連成および空間運動について述べたが、特に中低音域の音色に関係しているのが弦の長手方向の振動である。弦の長手方向に縦振動が生じることは古くから知られていたが、響板に対して垂直方向の振動(横振動)との連成振動が注目されたのは近年のことである。

3.4節で述べたように、ピアノ音の部分音のインハーモニシティについては古くから知られていたが、1980年頃から、ピアノの打音にこれと異なる部分音の系列が存在することが分かってきた(Alfredson [31]、Bachmannら [32])。中村ら[33,34]は、この系列においては、倍音からの振動数のずれが通常の系列の1/4程度であることを指摘し、通常の系列と区別する意味で2次系列と名付けた。

その後、この現象に着目したConklin [35,36]は、弦軸方向と垂直方向の振動(横振動)による張力変化が横振動の2倍になることに着目し、ピアノ音の周波数分析結果には、低次の振動の合成から生み出された振動成分が含まれていると考えた。Conklinは先行研究には触れておらず、2次系列に対してPhantom partialsと命名した。長沼ら[37]、高澤ら[38]は、この現象は通常の弾性弦の微分方程式に弦の局所的な張力変化を表す項を追加することで再現可能であることを示し

た。また、加藤ら [39]、Nishiguchiら [23] は、有限変形理論に基づく有限要素法を用いることにより、横振動の速度成分に2次系列が現れることを示した。更に、Bankら [40] は、2次系列は横振動による縦振動系への強制振動によって生成されるとし、その理論を示すとともにそれに基づくピアノ音源の生成法を提案した [41]。Bankらはモード重ね合わせ法を用いているが、有限変形理論によっても同様な結果を得ることができる [42]。

図10にピアノのC3音の周波数分析結果を示す[23]。図中に基音および部分音の複数のピークが存在するが、図に●を付けたのが2次系列である。

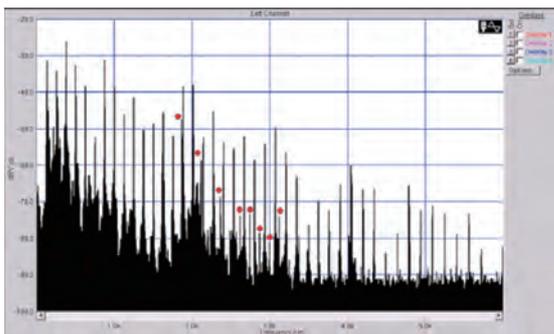


図10 C3音の2次系列

4. おわりに

以上、発音部であるピアノ弦を中心に物理モデルの例を示したが、響板の振動特性やピアノからの音響放射などについても物理モデルの検討が行われている。その成果として、従来のように実際のピアノの音をサンプリングした音源に頼らない電子ピアノや音源ソフトも発売されている。しかしながら、ピアノメーカーによる音の違いや調律師の行う整音作業による音の変化等を定量的に評価できる物理モデルの構築には至っていない。今後の発展が期待される。

参考文献

- [1] J. Parakilas, "1700 to 1770s: The need for the piano," *Piano Roles*, Yale University Press, 2000.
- [2] 渡邊順生, *チェンバロ・フォルテピアノ*, 第6章, 東京書籍, 2000.
- [3] 西口磯春, 鈴木英男, 森太郎, 三浦雅展, *ピアノの音響学*, コロナ社, (近刊).
- [4] 西口磯春, 森太郎, *もっと知りたいピアノのしくみ*, 第4章, 音楽之友社, 2005.
- [5] A. Stulov, "Piano hammer-string interaction," *Proc. ICA2004*, Kyoto, Japan, pp.III-2127-2130, 2004.
- [6] H. L. F. Helmholtz, *On the sensations of tone as a physiological basis for the theory of music*, 2nd ed. (ドイツ語第4版(1877)からの英訳), Dover, 1954.
- [7] 西口磯春, 佐々木正孝, "ピアノ弦振動特性の実験および数値解析による検討," *日本音響学会 音楽音響研究会資料*, vol.19, No.3, pp.33-40, 2000.
- [8] A. Askenfelt and E. V. Jansson, "From touch to string vibrations. I: Timing in the grand piano action," *J. Acoust. Soc. Am.*, 88(1), 52-63, 1990.
- [9] D. E. Hall, "Piano string excitation in the case of small hammer mass," *J. Acoust. Soc. Am.* 79, 141-147, 1986.
- [10] D. E. Hall, "Piano string excitation II: General solution for a hard narrow hammer," *J. Acoust. Soc. Am.* 81, 535-546, 1987.
- [11] D. E. Hall, "Piano string excitation III: General solution for a soft narrow hammer," *J. Acoust. Soc. Am.* 81, 547-555, 1987.
- [12] H. Suzuki, "Vibration analysis of hammer-shank system," *CBS Tech. Center Report*, 1983.
- [13] A. Askenfelt and E. V. Jansson, "From touch to string vibrations. II: The motion of the key and hammer," *J. Acoust. Soc. Am.*, 90(5), 2383-2393,

- 1991.
- [14] A. Izadbakhsh, J. McPhee, and S. Birkett,, “Dynamic modelling of a piano action mechanism with a flexible hammer shank,” in Proceedings of the Fifth CC To MM Symposium on Mechanisms, Machines and Mechatronics CSME Forum, Calgary, AB, 2007.
- [15] A. Izadbakhsh, J. McPhee, and S. Birkett, “Dynamic modeling and experimental testing of a piano action mechanism with a flexible hammer shank,” in Proceedings of the Sixth International Conference on Multibody Systems, Nonlinear Dynamics, and Control MSNDC, Las Vegas, NV 2007, Paper No. DETC2007-35351, 2007.
- [16] A. Izadbakhsh, J. McPhee, and S. Birkett, “Dynamic modelling and experimental testing of piano action mechanism with a flexible hammer shank,” ASME J. Comput. Nonlinear Dyn. 3, 1-10, 2008.
- [17] 西口磯春, 佐々木正孝, “ピアノアクション機構のモデル化に関する検討,” 日本音響学会音楽音響研究会資料, vol.31, No.2, pp.23-28, 2012.
- [18] 西口磯春, 佐々木正孝, 村上拓也, 山田倫也, “ピアノアクション機構のモデル化に関する検討 (第2報),” 日本音響学会音楽音響研究会資料, vol.31, No.3, pp.61-64, 2012.
- [19] S. Birkett, “Experimental investigation of the piano hammer-string interaction,” J. Acoust. Soc. Am. 133, 2467-2478, 2013.
- [20] H. Suzuki, “Geometrical nonlinearity analysis of a piano hammer by the use of a finite element method,” Acoust. Sci. & Tech. 34, 3, 219-220, 2013.
- [21] A. Chaigne and A. Askenfelt, “Numerical simulations of piano strings I. A physical model for a struck string using finite difference methods,” J. Acoust. Soc. Am. 95, 1112-1118, 1994.
- [22] A. Chaigne and A. Askenfelt, “Numerical simulations of piano strings II. Comparisons with measurements and systematic exploration of some hammer-string parameters,” J. Acoust. Soc. Am. 95, 1631-1640, 1994.
- [23] I. Nishiguchi and M. Sasaki, “Numerical analyses of a piano string by a three dimensional large deformation theory,” Proc. ISMA2004, Nara, Japan, pp.223-226, 2004.
- [24] I. Nishiguchi, I. Tokuhiko, M. Sasaki, K. Hasegawa, “Vibration of the strings, bridge and soundboard of a piano,” Proceedings of International Symposium on Musical Acoustics, Barcelona, Spain, 9-12 September, pp.1-8, 2007.
- [25] 高澤嘉光, “楽器における「打・叩・撞」のモード法による解析—ピアノの場合,” 日本音響学会音楽音響研究会資料, vol.25, No.1, pp.11-16, 2006.
- [26] G. Weinreich, “Coupled piano strings,” J. Acoust. Soc. Am. 62, 1474-1484, 1977.
- [27] 山本亜樹, 西口磯春, 佐々木正孝, “ピアノ複数弦の連成に関する基礎的検討,” 日本音響学会音楽音響研究会資料, vol.24, No.1, pp.7-12, 2005.
- [28] 西口磯春, 佐々木正孝, 山田倫也, “ピアノの2段減衰のモデル化についての検討,” 日本音響学会音楽音響研究会資料vol.32, No.3, pp.47-52, 2013.

- [29] 岩岡聡一郎, 中村勲, “水平方向を考慮したピアノ弦の振動のシミュレーション,” 音講論集, pp.399-400, (1986.9), 1986.
- [30] 長沼大介, 岸憲史, 鎌倉友男, “2つの共振を持つ響板におけるピアノ弦の2次元振動,” 音講論集, pp.967-968 (2011.3), 2011.
- [31] R. J. Alfredson, “Fourier transform methods for analysing the sounds of a piano.,” ACUSTICA, 39, 130-132, 1978.
- [32] Bachmann et al. [1989]: W. Bachmann, H. Bucker, B. Kohl, “Feinstrukturanalyse des einschwingens eines pianoklanges,” ACUSTICA, 68, 123-130, 1989.
- [33] 中村勲, 岩岡聡一郎, 長沼大介, “立ち上がり音の時間一周波数分布(ピアノ音の分析に関する研究 第3報),” 音講論集, pp.481-482 (1990.9), 1990.
- [34] I. Nakamura and D. Naganuma, “Characteristics of piano sound spectra,” Proc. Stockholm Music Acoustic Conference, Sweden, pp.325-330, 1993.
- [35] H. A. Conklin, Jr., “Piano strings and” phantom “partials,” J. Acoust. Soc. Am. 102, 659, 1997.
- [36] H. A. Conklin, Jr., “Generation of partials due to nonlinear mixing in a stringed instrument,” J. Acoust. Soc. Am. 106, 536-545, 1999.
- [37] 長沼大介, 中村勲, “非線形を考慮したピアノ弦振動の考察,” 音講論集, pp.523-524, (2000.9), 2000.
- [38] 高澤嘉光, 徳弘一路, “弦振動における非線形性について, 一第二部分音系列(Phantom partials)発生のメカニズム一,” 音講論集, pp.521-522, (2000.9), 2000.
- [39] 加藤光一郎, 加藤東, 西口磯春, 佐々木正孝, “ピアノ弦振動特性の実験および数値解析による検討(第2報),” 日本音響学会音楽音響研究会資料, vol.19, No.4, pp.87-88, 2000.
- [40] B. Bank and L. Sujbert, “Generation of longitudinal vibrations in piano strings: From physics to sound synthesis,” J. Acoust. Soc. Am. 117, 2268-2278, 2005.
- [41] B. Bank, S. Zambon, F. Fontana, “A Modal-Based Real-Time Piano Synthesizer,” IEEE Trans. Auedio, Speech and Language processing, 18(4) 809-821, 2010.
- [42] 西口磯春, 小池正通, 佐々木正孝, “ピアノ弦の横振動と縦振動の連成に関する検討(第2報)一理論式と数値解析法について,” 日本音響学会音楽音響研究会資料, vol.29, No.4, pp.17-22, 2010.